QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit les points $M(z)$ et $M'(z')$.

1. a. La distance MM' est égale à

☐ $|z-z'|$. ☐ $\big||z|-|z'|\big|$. ☐ $|z+z'|$.

b. Si $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$ alors

☐ O, M et M′ sont alignés. ☐ $z = z'$. ☐ $|z| = |z'|$.

2. A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $z_B - z_A = 4i(z_C - z_A)$. Alors

☐ ABC est isocèle. ☐ (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ☐ (AB) et (AC) sont parallèles.

3. L'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ a pour solutions

☐ $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1+i$ ☐ $z_1 = 2i$ et $z_2 = -i$ ☐ $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 2+i$

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Une équation du second degrés dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux racines opposées.
2. Soit z et a deux nombres complexes non nuls.

   $z^4 = a^4$, si et seulement si, $z = a$ ou $z = -a$.
3. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels.

   Le conjugué du nombre complexe $Z = z_1 + iz_2$ est $\overline{Z} = z_1 - iz_2$.
4. Deux nombres complexes non nuls ayant même argument et même partie réelle sont égaux.
5. Soit z un nombre complexe. Si z^3 est réel alors nécessairement z est réel.
6. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

   Si $|z| = |z'|$ alors nécessairement $z = z'$ ou $z = -z'$.

Exercices et problèmes

1 Déterminer dans chacun des cas ci-dessous, les nombres complexes z sous forme algébrique.

a. $\dfrac{z-i}{z+i}=2i$.

b. $\dfrac{z+i}{2z}=1-i$.

c. $\dfrac{2z+i}{iz}=\dfrac{2iz}{1-z}$.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Représenter, dans chacun des cas ci-dessous, les points A, B, S, P, I et J d'affixes respectives

z_A, z_B, z_A+z_B , z_Az_B, $\dfrac{1}{z_A}$ et $\dfrac{1}{z_B}$.

a. $|z_A|=3$, $\arg(z_A)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$,

$|z_B|=1$ et $\arg(z_B)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b. $|z_A|=2$, $\arg(z_A)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$,

$|z_B|=4$ et $\arg(z_B)\equiv\pi\ [2\pi]$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit $z\neq -i$ et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\dfrac{z+1}{z}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe.

1. Déterminer et construire l'ensemble

$E=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1\right\}$.

2. En déduire l'ensemble

$F=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\dfrac{2\bar{z}-2}{z-i}\right|=2\right\}$.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z)-\arg(z-1)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

7 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes $2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, $-e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $3e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

8 Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes

a. $\left(3e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)^3$, $\dfrac{2e^{\frac{i\pi}{5}}}{3e^{i\pi}}$, $\left(e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^4\left(e^{-i\pi}\right)^3$.

b. $-3+3i$, $2\sqrt{3}-2i$, $(1-i)^5$, $\dfrac{1-i+\sqrt{2}}{1+i+\sqrt{2}}$.

9 Soit le nombre complexe

$a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

1. Donner l'écriture exponentielle de a^2.
En déduire l'écriture exponentielle de a.
2. Donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

a. Construire les points A et B d'affixes respectives a et ia^2.

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tels que $\arg\left(\dfrac{iz+a^2}{z-a}\right)=-\dfrac{11\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vérifier que O appartient à E. Tracer E.

Exercices et problèmes

10 On considère les nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
Donner l'écriture exponentielle de
iz_1, $\frac{z_2}{1+i}$, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1z_2z_3$, z_3^4, $\frac{z_2^3}{z_1^6}$ et $\frac{\overline{z_2}}{z_3}$.

11 Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(i+1)$.

12 Déterminer les racines quatrièmes de $8\sqrt{2}(-1-i)$.

13 Déterminer les racines cinquièmes de $32\,i$.

14 Déterminer les racines sixièmes de $32\left(i-\sqrt{3}\right)$.

15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.
a. $z^2+18z+1681=0$.
b. $z^2-(5-i)z+8-i=0$.
c. $z^2+4(i-1)z+2(4-i)=0$.
d. $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$.

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.
a. $z^4+6z^2+25=0$.
b. $z^4+4z^2-77=0$.

17 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3-8z^2+24z-32=0$.
Vérifier que $z_0=4$ est une solution de (E).
2. Résoudre (E).
On notera z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.
Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2.

18 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$.
1. Montrer que l'équation admet une racine réelle que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

19 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3=2+11\,i$.
1. Vérifier que $z_0=2+i$ est une solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z\overline{z}+3(z-\overline{z})=13+18i$, on notera z_1 et z_2 les solutions avec $\mathrm{Re}(z_1)<0$.
2. Représenter les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
3. Déterminer l'affixe du point G centre de gravité du triangle OAB.
4. Déterminer l'affixe du point C pour que OABC soit un parallélogramme.

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0$.
a. Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle que l'on déterminera.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2. a. Représenter les points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.
b. Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$.
En déduire la nature du triangle OBC.
c. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?
d. Soit D le point tel que CD = CO et $(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Quelle est la nature de OCDB ?

22 1. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0.$$

23 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$1+z+z^2+...+z^6=0$.

Calculer $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

24 1. Montrer que pour tout entier $n>0$ et tout nombre complexe z,

$1-z^{n+1}=(1-z)\left(1+z+z^2+...+z^n\right)$.

2. Montrer que pour tout réel θ,

$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

3. Soit un entier $n\geq 1$ et un réel $\theta\neq 2k\pi$, k un entier relatif.

On pose $S=1+\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta$ et $S'=\sin\theta+\sin 2\theta+...+\sin n\theta$.

a. Montrer que $S+iS'=\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$.

b. En déduire que $S=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos n\frac{\theta}{2}$

et $S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin n\frac{\theta}{2}$.

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui même, qui à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=z^2-4z$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $1-i$ et $3+i$.

1. a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.

b. On suppose que deux points ont la même image par f. Montrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

a. Montrer que $OMIM'$ est un parallélogramme, si et seulement si, $z^2-3z+3=0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z+3=0$.

3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$.

En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.

b. On considère les points J et K d'affixes respectives 2 et -4.

Montrer que l'image de tout point M du cercle de centre J et de rayon 2 appartient à un même cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_E=-4-3i$.

Donner la forme trigonométrique de z_E+4 et montrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.

Préciser l'écriture algébrique de l'affixe de ces deux points.

26 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 et i.

On considère l'application f de $P\setminus\{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P\setminus\{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z+1}{z-2i}$.

1. a. On désigne par C', l'image de C par l'application f.

Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?

b. Montrer que le point C admet un unique antécédent par l'application f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

2. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z'.

3. a. Déterminer l'ensemble E des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.

b. Déterminer l'ensemble F des points M tels que z' soit un nombre imaginaire non nul.

c. Déterminer l'ensemble G des points M tels que M' appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercices et problèmes

27 Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta} - i$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. On désigne par M et M′ les points images respectives de z et $\bar{z}$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'affixe du point N pour que OMNM′ soit un losange.

2. a. Montrer que $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$.

b. Mettre $\frac{\bar{z}}{z}$ sous la forme exponentielle.

c. En déduire la valeur de θ pour que OMNM′ soit un carré.

d. Construire le carré OMNM′ pour la valeur de θ trouvée.

28 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe 1.

On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = \frac{\bar{z} + 3}{z - 1}$.

1. Soit B le point d'affixe $1 - i$.

a. Déterminer l'affixe du point B′ image de B par f.

b. Placer les points B et B′ dans le plan P.

2. Soit C le point d'affixe $1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a. Calculer AC.

b. Déterminer $(\vec{u}, \overrightarrow{AC})$.

c. En déduire la construction du point C.

d. Montrer que $f(C) = C$.

3. a. Calculer $(\bar{z} - 1)(z' - 1)$.

b. En déduire que $AM.AM' = 4$.

c. Déterminer l'image par f du cercle de centre A et de rayon 2.

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

On désigne par A_0 le point d'affixe $z_0 = 6 + 6i$ et pour tout entier naturel n, on désigne par A_n le point d'affixe $z_n = a^n z_0$.

1. Ecrire z_1 et a^2 sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Exprimer z_3 et z_7 à l'aide de z_1 et a^2.

3. En déduire l'écriture exponentielle de z_3 et z_7.

4. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7.

30 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M′ sont alignés et que $OM \cdot OM' = 1$.

3. a. Montrer que les points A, B et C d'affixes respectives 4, $2 + 2i$, $2 - 2i$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre le point I d'affixe 2 et de rayon 2.

b. Calculer les affixes des points A′, B′ et C′ images par f des points A, B et C.

Montrer que les points A′, B′ et C′ appartiennent à une même droite dont on donnera une équation.

4. a. Montrer pour tout nombre complexe non nul z, $|z - 2| = 2$, si et seulement si, $\left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$.

b. En déduire l'image par f du cercle $\mathscr{C}$.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, le point d'affixe $z_A = 1$, et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

I. Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $(1 + z_B^2)$.

1.a. Montrer que le point B appartient à $\mathscr{C}$.

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$. Placer le point B.

2. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_B - z_A)$ et $(z_E - z_A)$.

b. En déduire que les points A, B et E sont alignés.

3. Placer le point E.

II. Pour tout nombre complexe z différent de 1, on considère les points M et M′ d'affixes respectives z et z′ où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour tout $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner à l'aide des points A, M et M′, une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\frac{z'-1}{z-1}$.

2. En déduire que A, M et M′ sont alignés, si et seulement si, $\frac{z^2}{z-1}$ est un réel.

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$.

On désigne par M_n le point du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}) \equiv \alpha_n \ [2\pi]$.

1. Placer les points M_n, pour $0 \leq n \leq 8$.

2. On note z_n l'affixe de M_n. Ecrire z_n sous forme exponentielle.

3. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés.

4. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

5. Montrer que pour tout entier n, $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$.

En déduire que pour tout entier n, le triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ est équilatéral.

33 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = -1$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que $\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

3. En déduire les solutions de l'équation $(z+i)^4 = -(z-i)^4$.

34 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $-i$.

On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ telle que $z' = \frac{i\bar{z}}{i-z}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. a. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $(z'+i)(\bar{z}-i) = 1$.

b. En déduire que $AM'.AM = 1$ et que $M' \in [AM)$.

3. a. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,

Montrer que l'affixe de $f(M)$ est égale à $e^{i\theta}$, si et seulement si, $z = -\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

c. En déduire les solutions de l'équation $iz^3 = (-i-z)^3$.

35 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un réel et l'équation $(E) : z^2 + a(1-i)z - ia^2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

On notera z_1 la solution réelle et z_2 l'autre solution.

2. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2 + z_1$ et z_2.

Soit le carré de sens direct ACBD.

a. Montrer que le point C est fixe.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points D lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

36 1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$.

b. Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

2. On pose $U=\frac{1}{2}\left[(1-i)+\sqrt{3}(1+i)\right]$.

a. Calculer U^2.
b. Déterminer la forme trigonométrique de U.
c. En déduire alors les valeurs de
$\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Pour tout $Z\in\mathbb{C}$, on pose
$P(Z)=Z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)Z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)Z-8i$.

a. Montrer que l'équation $P(Z)=0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points
$A\left(\sqrt{3}-i\right)$, $B\left(\sqrt{3}+i\right)$ et $C(2i)$.

a. Représenter les points A, B et C.
b. Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

37 Soit un réel α de $[0,\frac{\pi}{2}]$.

I. 1. Exprimer à l'aide de α,
$\left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)^2-\left(e^{i2\alpha}-2e^{i\alpha}\right)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2-\left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)z+2e^{i3\alpha}=0$.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B, A′et B′ les points d'affixes respectives $z_A=e^{i2\alpha}$, $z_B=2e^{i\alpha}$, $z_{A'}=iZ_A$ et $z_{B'}=-iZ_B$.

1. a. Mettre $z_{A'}$ et $z_{B'}$ sous la forme exponentielle.

b. Placer les points A, B, A′ et B′ pour $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

2. Soit I le milieu du segment $[A'B']$.

a. Montrer que $\frac{z_I}{z_B-z_A}=-\frac{1}{2}i$.

b. En déduire que la médiane issue de O du triangle OA′B′ est une hauteur issue de O du triangle OAB et que $OI=\frac{1}{2}AB$.

38 I.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2-2e^{i\alpha}z+2e^{2i\alpha}=0$, α un réel de $[0,\pi]$.

2. Mettre les solutions sous la forme exponentielle.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives
$z_1=(1-i)e^{i\alpha}$ et $z_2=(1+i)e^{i\alpha}$.

1. a. Montrer que $\frac{z_2}{z_1}=i$.

b. En déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

2. a. Montrer que $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\alpha+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b. Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite d'équation $y=x$.

c. Construire A et B pour la valeur de α trouvée.

39 Soit un réel θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation
$(E): iz^2+6\sin\theta z-9i=0$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b. Ecrire sous la forme exponentielle les solutions de l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $3i$, $z_1=3(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z_2=3(-\cos\theta+i\sin\theta)$.

a. Vérifier que les points A, M_1 et M_2 sont sur un même cercle que l'on précisera.
b. Déterminer la valeur de θ pour laquelle le quadrilatère OM_1AM_2 soit un losange.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^4+3\sqrt{3}z^2-9i=0$.
Placer les points images des solutions.

QCM :

1) a) $|z-z'|=MM'$

b) O, M et M' alignés

2) $(AB)\perp(AC)$

3) les solutions de l'équation : $z^2-2z+2=0$ sont

$z_1=1-i$ et $z_2=1+i$

Vrai-Faux :

1) (faux)

Par exemple les solutions de l'équation : $z^2-2z+2=0$ sont 1-i et 1+i qui ne sont pas opposées.

2) (faux)

$z^4=a^4 \Leftrightarrow z^4-a^4=0$

$\Leftrightarrow (z^2-a^2).(z^2+a^2)=0$

$\Leftrightarrow (z-a)^2.(z+a)^2.(z-ia).(z+ia)=0$

$\Leftrightarrow z=a \text{ ou } z=-a \text{ ou } z=ia \text{ ou } z=-ia$

3) (faux) en effet :

$Z=z_1+iz_2$

$\Rightarrow \overline{Z}=\overline{z_1}-i\overline{z_2}$

4) (faux)

Contre exemple : z=2i

z'=3i

$\text{Re}(z)=\text{Re}(z')=0$

$Arg(z)\equiv Arg(z')(2\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ *alors que* $z\neq z'$

5) (faux)

Contre exemple : $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z^3=-1$

$z^3\in IR \text{ mais } z\notin IR$

6) (faux)

Contre exemple : z=1 et z'=i

$|z|=|z'|$ mais $z\neq z'$

et $z\neq -z'$

EX1 :

a)

$$\frac{z-i}{z+i}=2i \Leftrightarrow z-i=2i(z+i) \Leftrightarrow z-i=2iz-2 \Leftrightarrow (1-2i)z=-2+i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+i}{1-2i} \Leftrightarrow z=\frac{(-2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-4-3i}{5}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-4}{5}-\frac{3}{5}i$$

b)

$$\frac{z+i}{2z}=1-i \Leftrightarrow z+i=2(1-i)z \Leftrightarrow (1-2i)z=i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{i}{1-2i}=\frac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+i}{5} \Leftrightarrow z=\frac{-2}{5}+\frac{1}{5}i$$

c)

$$\frac{2z+i}{iz}=\frac{2iz}{1-z} \Leftrightarrow (2z+i)(1-z)=iz(2iz) \Leftrightarrow -2z^2+(2-i)z+i=-2z^2$$

$$\Leftrightarrow (2-i)z=-i \Leftrightarrow z=\frac{-i}{2-i}=\frac{-i(2+i)}{5}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

EX 2 :

a)

- $z_A=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4})$

$OA=3$ *et* $(\vec{u},\overrightarrow{OA})\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)$

- $z_B=(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=i$
- $z_S=z_A+z_B \Rightarrow \overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow$ *OASB est un #*

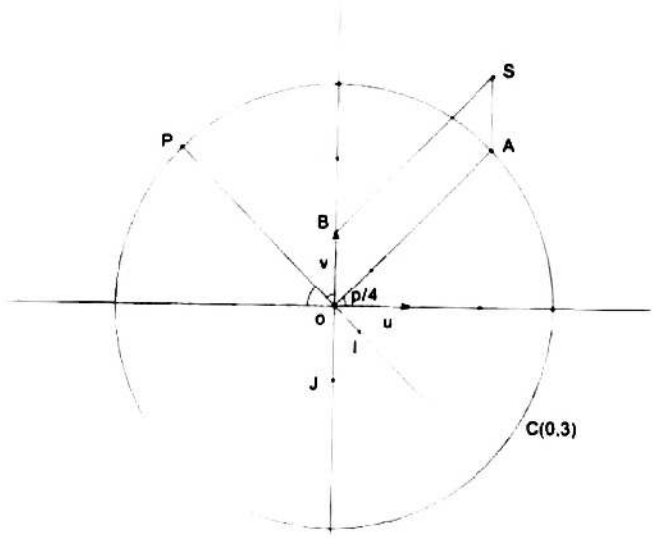
• $z_P = z_A.z_B = 3(\cos(\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}))$

$OP = 3$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{3\pi}{4}(2\pi)$

• $z_I = \frac{1}{z_A} = \frac{1}{3}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$

$OI = \frac{1}{3}$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{-\pi}{4}(2\pi)$

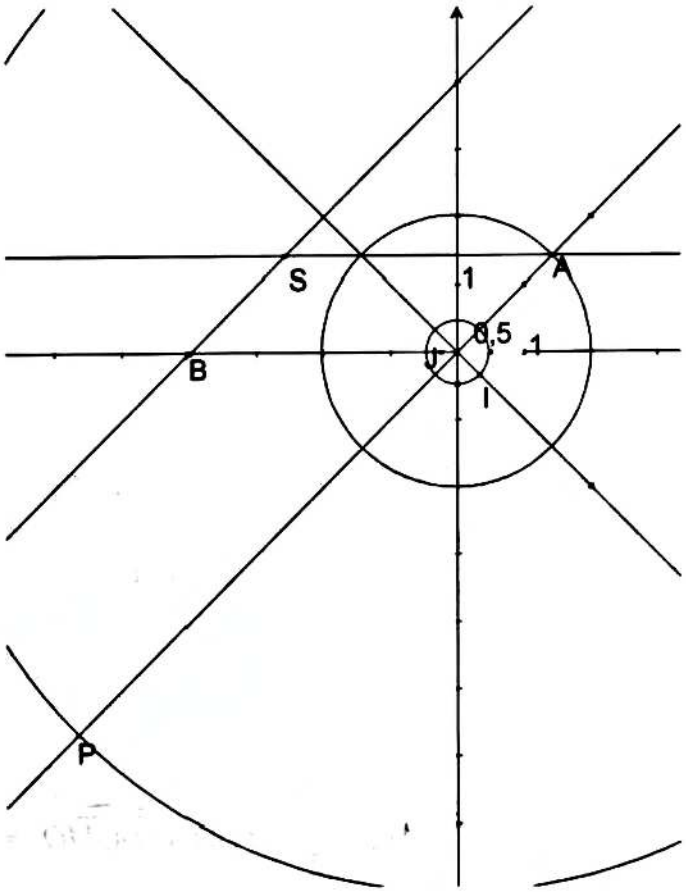
• $z_J = \frac{1}{z_B} = \frac{1}{i} = -i$



b) $z_A = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

OA=2 $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$

* $z_B = -4$
* $z_S = z_A + z_B$ OASB parallélogramme
* $z_P = z_A.z_B = 8.(\cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4})$
* $z_I = \frac{1}{z_A} = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$
* $z_J = \frac{1}{z_B} = \frac{-1}{4}$



EX 3 :

méthode analytique :

on pose z=x+i y

$$Z=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{[x+i(y-1)].[x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}=\frac{(x^2+y^2-1)-2ix}{x^2+(y+1)^2}$$

1) Z est un réel $\Leftrightarrow$ x=0

$z\neq -i \Rightarrow M\neq A(0,-1)$

soit Δ : la droite d'équation : x=0 ; $A\in\Delta$

d'où (ξ_1) est la droite Δ privée de A

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

(ζ) : le cercle de centre O de rayon 1

$A\in\zeta$ D'où (ξ_2) : le cercle (ζ) privé de A

Méthode géometrique :

Soit A(-i) et B(i)

1) Z est un réel $\Leftrightarrow \frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \overline{MA}$ et $\overline{MB}$ colinéaires $\Leftrightarrow M\in(AB)$

or $M\neq A$ *donc* $(\xi_1)=(AB)/\{A\}$

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{MA}\perp\overline{MB}\Leftrightarrow M\in(\zeta)$: cercle de diamètre [AB] or M≠A

$\xi_2=(\zeta)/\{A\}$

EX 4 : (voir ex 3)

EX 5 :

1)

$$E=\left\{M(z)/\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1\right\}$$

$$\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=1\Leftrightarrow|z-1|=|z-i|$$

Soit A(1) et B (i)

$M\in(E)\Leftrightarrow|z-z_A|=|z-z_B|\Leftrightarrow MA=MB\Leftrightarrow M\in\Delta=med[AB]$ Donc $E=med[AB]$

2) $M\in F\Leftrightarrow\left|\frac{2(\bar{z}-1)}{z-i}\right|=2\Leftrightarrow\frac{2(\bar{z}-1)}{z-i}=2\Leftrightarrow\frac{(\overline{z-1})}{z-i}=1\Leftrightarrow\frac{|z-1|}{|z-i|}=1\Leftrightarrow M\in E$ Donc F=E

EX 6 :

$z\neq0\rightarrow M\neq O$ $z\neq1\rightarrow M\neq A(1)$

$$Arg\ z\text{- Arg }(z\text{-}1)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Leftrightarrow Arg\left(\frac{z}{z\text{-}1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

$\Leftrightarrow M\in(\zeta)/\{A,O\}$ avec : (ζ) : demi cercle de diamètre [OA] contenu dans le demi plan y>0

EX 7 :

$$a=2e^{3i\frac{\pi}{2}}=2(\cos3\frac{\pi}{2}+i\sin3\frac{\pi}{2})=2(0-i)=-2i$$

$$b=-e^{3i\frac{\pi}{4}}=-(\cos3\frac{\pi}{4}+i\sin3\frac{\pi}{4})=-(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c=3e^{-2i\frac{\pi}{3}}=3(\cos2\frac{\pi}{3}+i\sin2\frac{\pi}{3})=3(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{-3}{2}+3i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

EX 8 :

a) $*\ (3e^{-i\frac{\pi}{5}})^3=27.e^{-3i\frac{\pi}{5}}$ $*\ \frac{2e^{i\frac{\pi}{5}}}{3e^{i\pi}}=\frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{5}-\pi)}=\frac{2}{3}e^{-4i\frac{\pi}{5}}$

$*\ (e^{3i\frac{\pi}{8}})^4=e^{3i\frac{\pi}{2}}$ $*\ (e^{-i\pi})^3=e^{-3i\pi}=e^{i\pi}$

D'où : $(e^{3i\frac{\pi}{8}})^4.(e^{-i\pi})^3=e^{3i\frac{\pi}{2}}.e^{i\pi}=e^{5i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) * z= -3+3i

$$|z| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \rightarrow z = 3\sqrt{2}.(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2}.(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2}.(\cos(3\frac{\pi}{4}) + i\sin(3\frac{\pi}{4})) = 3\sqrt{2}.e^{3i\frac{\pi}{4}}$$

* Z=2$\sqrt{3}$ -2i

$$|Z| = 4 \rightarrow Z = 4.(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 4.(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = 4.e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

* $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ D'où $(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5.e^{-5i\frac{\pi}{4}}$

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}.e^{-5i\frac{\pi}{4}}$$

* $$\frac{1+\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i} = \frac{\left[(1+\sqrt{2})-i\right]^2}{(1+\sqrt{2})^2+1} = \frac{(1+\sqrt{2})^2-1-2i(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}} = \frac{(2+2\sqrt{2})-2i(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

EX 9 :

1)

$$a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a^2 = 2\sqrt{3}+2i \rightarrow |a^2| = 4$$

$$a^2 = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

D'où $a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = -2e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $a = 2e^{13i\frac{\pi}{12}}$

$\text{Re}(a) > 0$ or $\cos\frac{13\pi}{12} < 0$ D'où $a = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$

2)

$$a = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

$$et\ a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

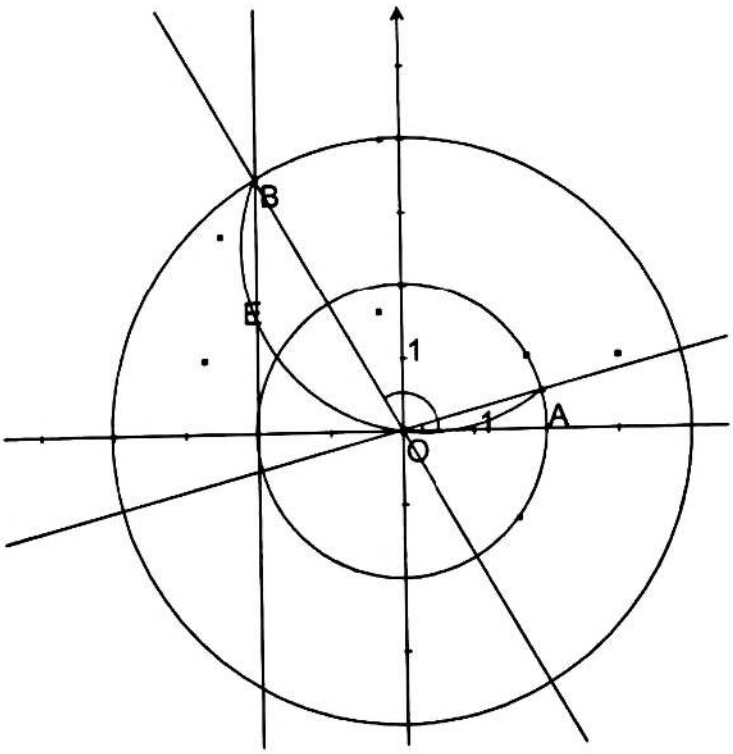
D'où $\begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

3)

a)

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{12}} \Rightarrow OA = 2 \quad et \quad (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{\pi}{12}(2\pi)$$

$$z_B = 4ie^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})} \Rightarrow OB = 4 \quad et \quad (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{2\pi}{3}(2\pi)$$



b)

$$Arg\left(\frac{iz+a^2}{z-a}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)\Leftrightarrow Arg\left(i\frac{\left(z-ia^2\right)}{z-a}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)\Leftrightarrow Argi+Arg\left(\frac{z-ia^2}{z-a}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+Arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})\equiv -\frac{11\pi}{12}(2\pi)\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv -\frac{17\pi}{12}(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv \frac{7\pi}{12}(2\pi) \qquad M\in \text{ Arc du cercle (E)}$$

$$\bullet\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv(\overrightarrow{OA},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{OB})(2\pi)\equiv(\vec{u},\overrightarrow{OB})-(\vec{u},\overrightarrow{OA})(2\pi)\equiv\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}(2\pi)\equiv\frac{7\pi}{12}(2\pi)\Rightarrow O\in E$$

$$\bullet\ iz_1=e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})}=e^{2i\frac{\pi}{3}} \qquad \bullet\ \frac{z_2}{1+i}=\frac{2e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{-\frac{11i\pi}{12}}$$

$$\bullet\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})}=\frac{1}{2}e^{5i\frac{\pi}{6}} \qquad \bullet\ z_1.z_2.z_3=2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$$

EX 10 :

$$\bullet\ z_3^4=(\sqrt{2})^4.e^{4(-i\frac{\pi}{4})}=4e^{-i\pi}=4e^{i\pi} \qquad \bullet\ \frac{z_2^3}{z_1^6}=\frac{8e^{-2i\pi}}{e^{i\pi}}=8.e^{i\pi}$$

$$\bullet\ \frac{\overline{z_2}}{z_3}=\frac{2e^{2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{11i\frac{\pi}{12}}$$

EX 11 :

$a = 4\sqrt{2}(1+i) = 4\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$

Les racines cubiques de a sont : $z_k = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3})}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$; $z_1 = 2e^{3i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = 2e^{17i\frac{\pi}{12}}$

EX 12 :

$a = 8\sqrt{2}(-1-i) = 8\sqrt{2}(\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}) = 16e^{-3i\frac{\pi}{4}}$

Les racines quatrièmes de a sont : $z_k = \sqrt[4]{16}.e^{i(\frac{-3\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4})}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\Rightarrow z_0 = 2e^{-3i\frac{\pi}{16}}$; $z_1 = 2e^{5i\frac{\pi}{16}}$; $z_2 = 2e^{13i\frac{\pi}{16}}$: $z_3 = 2e^{21i\frac{\pi}{16}}$

EX 13 :

$a = 32i = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$

Les racines cinquièmes de a sont :

$$z_k = \sqrt[5]{32}e^{i(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5})} = 2e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5})} \quad avec\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

EX 14 :

$a = 32(-\sqrt{3}+i) = 32(2e^{5i\frac{\pi}{6}}) = 64e^{5i\frac{\pi}{6}}$

Les solutions sont : $z_k = 2e^{i(\frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{6})}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

EX 15 :

a)

$z^2 + 18z + 1681 = 0$

$\Delta' = -1600$ $\delta' = 40i$ $z' = -9-40i$ et $z'' = -9+40i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-9-40i\ ;\ -9+40i\}$

b)

$$z^2-(5-i)z+8-i=0 \qquad \Delta=-8-6i$$

$$soit\ \delta=x+iy\ /\ \delta^2=-8-6i \Rightarrow \begin{cases}(1)\,x^2-y^2=-8 & (Réel(\Delta))\\ (2)\,x^2+y^2=10 & (|\Delta|)\\ (3)\,2xy=-6 & (\mathrm{Im}(\Delta))\end{cases}$$

$$(1)+(2)\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

$$pour\ x=1 \xrightarrow{(3)} 2y=-6\Rightarrow y=-3 \qquad \Rightarrow \delta=1-3i$$

$$z'=\frac{(5-i)-(1-3i)}{2}=2+i \quad et \quad z''=\frac{(5-i)+(1-3i)}{2}=3-2i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\{2+i\ ;3-2i\}$$

c)

$z^2+4(i-1)z+2(4-i)=0 \qquad \Delta'=[2(i-1)]^2-2(4-i)=-8-6i \Rightarrow \delta'=1-3i$

Les solutions sont :

$z'=-2(i-1)-(1-3i)=1+i$

$z''=-2(i-1)+(1-3i)=3-5i$ $\Rightarrow S_{\mathbb{C}}=\{1+i\ ;\ 3-5i\ \}$

d)

$z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0 \qquad \Delta=2i=(1+i)^2 \qquad \delta=1+i$

Les solutions sont :

$$z'=\frac{-(1-3i)-(1+i)}{2}=-1+i$$

$$z''=\frac{-(1-3i)+(1+i)}{2}=2i \qquad \Rightarrow S_{\mathbb{C}}=\{-1+i\ ;\ 2i\ \}$$

EX 16 :

a) $z^4+6z^2+25=0$ on pose : $t=z^2$

l'équation devient : $t^2+6t+25=0$

$\Delta'=-16\rightarrow\delta'=4i \qquad t'=-3+4i \quad et \quad t''=-3-4i$

$$\bullet\ t=-3+4i\Leftrightarrow z^2=-3+4i\Leftrightarrow \begin{cases}(1)\,x^2-y^2=-3\\ (2)\,x^2+y^2=5\\ (3)\,2xy=4\end{cases}$$ (en posant z=x+iy)

(1)+(2)$\Rightarrow 2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

Pour x=1 l'éq (3) donne y=2$\Rightarrow z_1=1+2i$

Pour x=-1 l'éq (3) donne y=-2$\Rightarrow z_1=-1-2i$

• $t=-3-4i \Leftrightarrow z^2=-3-4i \Leftrightarrow z^2=(1-2i)^2 \Leftrightarrow z=1-2i \text{ ou } z=-1+2i$

$$S_C=\{1+2i;-1-2i;1-2i;-1+2i\}$$

b)

$z^4+4z^2-77=0$ On pose : $t=z^2$ On aura : $t^2+4t-77=0$

$\Delta'=81 \rightarrow \delta'=9$

$t'=-11$ et $t''=7$

• $t=7 \Leftrightarrow z^2=7 \Leftrightarrow z=-\sqrt{7} \text{ ou } z=\sqrt{7}$

• $t=-11 \Leftrightarrow z^2=-11 \Leftrightarrow z=i\sqrt{11} \text{ ou } z=-i\sqrt{11}$

$$S_C=\left\{-\sqrt{7};\sqrt{7};-i\sqrt{11};i\sqrt{11}\right\}$$

c)

$(E): z^5=\bar{z}$

• 0 est une solution de (E).

• Déterminons les solutions non nulles de (E).

On pose $z=re^{i\theta}$; $r>0$

$(E) \Leftrightarrow (re^{i\theta})^5=\overline{re^{i\theta}}$

$\Leftrightarrow r^5e^{5i\theta}=re^{-i\theta}$

$$\Leftrightarrow r^4e^{6i\theta}=1e^{i.0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4=1 \\ 6\theta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$z_0=1 \ ; z_1=1.e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ z_2=1.e^{i2\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ z_3=1.e^{i\pi}=-1$$

$$z_4=1.e^{4i\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ z_5=1.e^{5i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_C=\left\{0,-1,1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

EX 17 :

Soit :

$$P(z) = z^3 - 8z^2 + 24z - 32$$

$$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

1) $p(4) = 0$ d'où $z_0 = 4$ est une solution de (E).

2) • Factorisons P(z).

$$p(z) = (z-4)(z^2 + bz + c)$$

$$p(z) = z^3 + (b-4)z^2 + (c-4b)z - 4c$$

Identifions

On aura : $\begin{cases} b-4 = -8 \\ c-4b = 24 \\ -4c = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 8 \end{cases}$

D'où $P(z) = (z-4)(z^2 - 4z + 8)$

• $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 4 = 0 \; ou \; z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Leftrightarrow z = 4 \; ou \; \Delta' = -4 \rightarrow \delta' = 2i$

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = 2 - 2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{4; 2+2i; 2-2i\}$$

$$z_1 = 2(1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

EX 18 :

Soit :

$$P(z) = z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$$

$$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$$

1) On pose $z = \alpha, \alpha \in IR$

$$P(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha^3-(3+4i)\alpha^2-4(1-3i)\alpha+12=0$$

$$\Leftrightarrow(\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12)+i(-4\alpha^2+12\alpha)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+12=0 & (1)\\ -4\alpha^2+12\alpha=0 & (2)\end{cases}$$

$(2)\Leftrightarrow\alpha(-4\alpha+12)=0\Leftrightarrow\alpha=0\ ou\ \alpha=3$

Vérifions dans (1) pour $\alpha=3$.

$(3)^3-3(3)^2-4.3+12=27-27-12+12=0$

D'où 3 est une solution réelle de E.

2) 3 est une solution de E⇒

$$P(z)=(z-3)\left[z^2+b.z+c\right]$$

$$P(z)=z^3+(b-3)z^2+(c-3b)z-3c$$

Identifions

On aura : $\begin{cases}b-3=-(3+4i)\\ c-3b=-4(1-3i)\\ -3c=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4i\\ c=-4\end{cases}$

D'où : $P(z)=(z-3)\left[z^2-4iz-4\right]$

$(E)\Leftrightarrow(z-3)(z^2-4iz-4)=0\Leftrightarrow z=3\ ou\ z^4-4iz-4=0\Leftrightarrow z=3\ ou\ (z-2i)^2=0\Leftrightarrow z=3\ ou\ z=2i$

$S_C=\{3;2i\}$.

EX 19 :

$$(E):z^3=2+11i$$

1) $(2+i)^3=2^3+3.2^2i+3.2(i)^2+i^3=8+12i-6-i=2+11i$

D'où $z_0=2+i$ est solution de (E)

2)

$(E)\Leftrightarrow z^3-(2+11i)=0$

Soit $f(z)=z^3-(2+11i)$

On a : $f(2+i)=0$ D'où $f(z)=\left[z-(2+i)\right].\left[z^2+bz+c\right]$

$f(z)=z^3+(b-2-i)z^2+\left[c-b(2+i)\right]z-c(2+i)$

Identifions

On aura : $\begin{cases} b-2-i=0 \\ c-b(2+i)=0 \\ -c(2+i)=-(2+11i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2+i \\ c=3+4i \end{cases}$

D'où : $f(z)=\left[z-(2+i)\right].\left[z^2+(2+i)z+3+4i\right]$

$(E) \Leftrightarrow z=2+i \text{ ou } z^2+(2+i)z+3+4i=0$

$\Delta=-3(3+4i) \Rightarrow \delta=i\sqrt{3}(2+i) \quad z'=\dfrac{\left(\sqrt{3}-2\right)-i\left(1+2\sqrt{3}\right)}{2} \text{ et } z''=\dfrac{-\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(2\sqrt{3}-1\right.}{2}$

$S_C=\{z_0; z'; z''\}$

EX 20 :

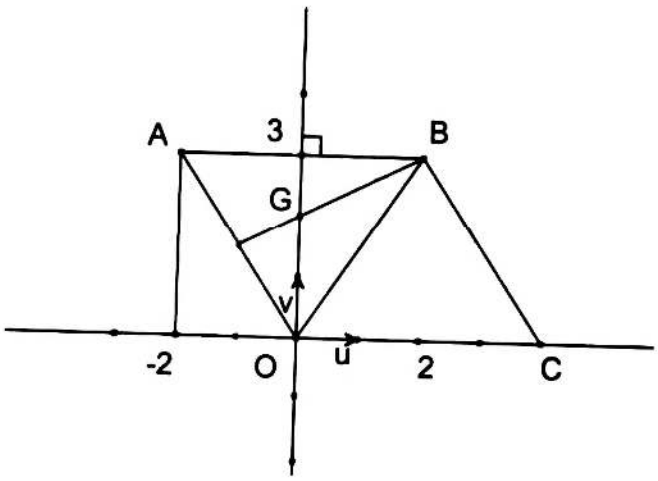
1) $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18i$

On pose $z=x+iy \rightarrow \bar{z}=x-iy$ *et* $z\bar{z}=x^2+y^2$ *et* $z-\bar{z}=2iy$

L'équation dévient $x^2+y^2+3(2iy)=13+18i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 6y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} ou \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

Les solutions sont : $z_1=-2+3i$ $z_2=2+3i$

2)



3)

$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{GO})+aff(\overrightarrow{GA})+aff(\overrightarrow{GB})=0$

$\Leftrightarrow -z_G+(z_A-z_G)+(z_B-z_G)=0 \Leftrightarrow 3z_G=z_A+z_B \quad \Leftrightarrow z_G=\frac{z_A+z_B}{3}=2i$

4) OABC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{OC})=aff(\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow z_C=z_B-z_A \Leftrightarrow z_C=4$

EX 21 :

1) soit :

$f(z)=z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4$

$(E) \Leftrightarrow f(z)=0$

a) soit : $z=x; x\in IR$

$f(z)=0 \Leftrightarrow (x^3-4x^2+7x-4)+i(-x^2+x)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+7x-4=0 & (1) \\ -x^4+x=0 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow x=0 \; ou \; x=1$

x = 1 vérifie l'équation (1), d'où 1 est une solution de (E).

b) factorisons f(z)

$f(z)=(z-1)(z^2+bz+c)$

$=z^3+(b-1)z^2+(c-b)z-c$

Identifions :

$\begin{cases} b-1=-(4+i) \\ c-b=7+i \\ -c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-(3+i) \\ c=4 \end{cases}$

D'où

$f(z)=(z-1)\left[z^2-(3+i)z+4\right]$

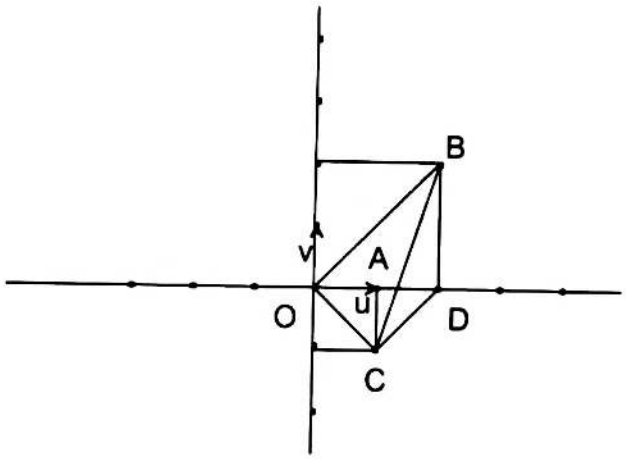
$f(z)=0 \Leftrightarrow z=1 \; ou \; z^2-(3+i)z+4=0$

$\Delta=-8+6i \Rightarrow \delta=1+3i$

$z_1=\frac{3+i+1+3i}{2}=2+2i \quad et \quad z_2=\frac{3+i-1-3i}{2}=1-i$

$S_C=\{1; 1-i; 2+2i\}$

2) a /



b/

$$\frac{2+2i}{1-i}=\frac{2(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2.2i}{2}=2i\Rightarrow\left|\frac{2+2i}{1-i}\right|=2 \quad et \quad Arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

$\frac{aff(\overrightarrow{OB})}{aff(\overrightarrow{OC})}=\frac{z_B}{z_C}=\frac{2+2i}{1-i}=2i\Rightarrow\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OC}}}$ est imaginaire d'où $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$ Par suite OBC est rectangle en O

c)

$$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)\equiv Arg\frac{z_B}{z_A}+Arg\frac{z_C}{z_A}[2\pi]$$

$$\equiv Arg(2+2i)+Arg(1-i)(2\pi)$$

$$\equiv\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}(2\pi)$$

$$\equiv 0(2\pi)$$

$\Rightarrow[OA)$: Bissectrice de $\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]$

d)

$$\left.\begin{array}{l}(OB)\perp(OC)\\(CD)\perp(OC)\end{array}\right\}\Rightarrow(OB)//(CD)$$

$$B\hat{O}C=\frac{\pi}{2}=O\hat{C}D$$

$$OB=|z_B|=2\sqrt{2}\neq CD=OC=|z|=\sqrt{2}$$

OCDB est un trapèze.

EX 22 :

1) $z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1.e^{i0}$

Les solutions sont :

$z_k = \sqrt[4]{1}e^{i(\frac{2k\pi}{4})}$ *avec* $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$z_0 = 1 \;\; ; z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \;\; ; z_2 = e^{i\pi} = -1 \;\; ; z_3 = e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$

2) $(E): \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

On pose $t = \frac{z-i}{z+i}$

L'équation devient : $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$

(-1) est une solution d'où :

$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2 + bt + c) = t^3 + (b+1)t^2 + (c+b)t + c$

En identifions on aura : $\begin{cases} b+1=1 \\ c+b=1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=1 \end{cases}$

D'où

$t^3 + t^2 + t + 1 = (t+1)(t^2+1)$

$t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t+1 = 0 \; ou \; t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \; ou \; t^2 = -1 \Leftrightarrow t = -1 \; ou \; t = -i \; ou \; t = i$

$\bullet \; t = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow tz + ti = z - i \Leftrightarrow (1-t)z = i(1+t) \Leftrightarrow z = i\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$

pour $t = -1 \rightarrow z = 0$

pour $t = i \rightarrow z = i\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = -1$

pour $t = -i \rightarrow z = i\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = 1$

Les solutions de (E) sont : 0 ; -1 et 1. $S_{\mathbb{C}} = \{-1; 0; 1\}$

EX 23 :

a)

$(E): 1 + z + z^2 + ... + z^6 = 0$

On a : pour $z \neq 1$ $\quad 1 + z + z^2 + ... + z^6 = \frac{1-z^7}{1-z}$

1 n'est pas une solution de (E) d'où : $(E) \Leftrightarrow 1 - z^7 = 0 \; et \; z \neq 1$

$\Leftrightarrow z^7 = 1 \; et \; z \neq 1$

Les solutions sont : $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{7})}$; $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

b) $e^{2i\frac{\pi}{7}}$ est une solution de (E)

$\Rightarrow 1+e^{2i\frac{\pi}{7}}+e^{4i\frac{\pi}{7}}+e^{6i\frac{\pi}{7}}+e^{8i\frac{\pi}{7}}+e^{10i\frac{\pi}{7}}+e^{12i\frac{\pi}{7}}=0$

$\Rightarrow \text{Re}(1+e^{2i\frac{\pi}{7}}++e^{4i\frac{\pi}{7}}+e^{6i\frac{\pi}{7}}+e^{8i\frac{\pi}{7}}+e^{10i\frac{\pi}{7}}+e^{12i\frac{\pi}{7}})=0$

$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$

$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos(2\pi-\frac{6\pi}{7})+\cos(2\pi-\frac{4\pi}{7})+\cos(2\pi-\frac{2\pi}{7})=0$

$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=0$

$\Rightarrow 1+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=0$

$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

EX 24 :

1) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b).\sum_{k=0}^{n}a^k.b^{n-k}$

D'où $1-z^{n+1}=(1-z)\sum_{k=0}^{n}1^k.z^{n-k}=(1-z)\left[z^n+z^{n-1}+.....+z+1\right]$

2)

$1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\frac{\theta}{2}}=-e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right]=-e^{i\frac{\theta}{2}}\left[2i\sin\frac{\theta}{2}\right]$ D'après les Formules d'Euler.

D'où $1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

3) $n\geq 1; \theta\neq 2k\pi; k\in\mathbb{Z}$

$S=1+\cos\theta+\cos2\theta+.....+\cos n\theta$ et $S'=1+\sin\theta+\sin2\theta+.....+\sin n\theta$

a)

$$S+iS'=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta+i\sin 2\theta)+.....+\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$$S+iS'=1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{ni\theta}$$

D'après 1)

$$1-e^{i(n+1)\theta}=(1-e^{i\theta})\left[1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{in\theta}\right]$$

$comme\ e^{i\theta}\neq 1\ car\ \theta\neq 0(2\pi)$

Alors

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+.....+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$$

Par suite :

$$S+iS'=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

b) $S\in IR\ et\ S'\in IR$ d'où $S=\mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right]$

d'après 2)

$$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$1-e^{i(n+1)\theta}=-2i\sin\left[\frac{(n+1)\theta}{2}\right]e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}$$

D'où

$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\left(\frac{n\theta}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{n}{2}\theta+i\sin\frac{n}{2}\theta\right]$$

$$S=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\quad et\quad S'=\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

EX 25 :

$z_A = 1-i$ et $z_B = 3+i$ $\quad f : M(z) \to M'(z')$ $\quad tq : z' = z^2 - 4z$

1) a)

$A' = f(A) \Leftrightarrow z_{A'} = z_A^2 - z_A \Rightarrow z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) \Rightarrow \boxed{z_{A'} = -4+2i}$

$B' = f(B) \Leftrightarrow z_{B'} = z_B^2 - 4z_B \Leftrightarrow z_{B'} = (3+i)^2 - 4(3+i) \Rightarrow \boxed{z_{B'} = -4+2i}$ ($Rque : A' = B'$)

b) Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \Leftrightarrow (z_1^2 - z_2^2) - 4(z_1 - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0$ ou $z_1 + z_2 = 4 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ou $\frac{z_1 + z_2}{2} = 2$

Soit « L » le point d'affixe 2.

$f(M_1) = f(M_2) \Leftrightarrow z_1 = z_2$ ou $\frac{z_1 + z_2}{2} = z_L$

$\Leftrightarrow M_1 = M_2$ ou $L = M_1 * M_2$

$\Leftrightarrow M_1 = M_2$ ou $M_2 = S_L(M_1)$

2) $z_I = -3$

a) OMIM' est un parallélogramme ssi

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow z' = -3 - z \Leftrightarrow z^2 - 4z = -3 - z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$

b) $z^2 - 3z + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 12 = -3 \quad \to \quad \delta = i\sqrt{3}$

Les solutions sont : $z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z'' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

3)

a) $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 \Rightarrow |z' + 4| = |z - 2|^2$ et $Arg(z' + 4) \equiv 2Arg(z - 2)(2\pi)$

$z_J = 2$; $z_K = -4$

b) $M \in C(J, 2) \Rightarrow JM = 2 \Rightarrow |z - 2| = 2 \Rightarrow |z' + 4| = 4 \Rightarrow KM' = 4 \Rightarrow M' \in C(K, 4)$

c) $z_E = -4 - 3i \Rightarrow z_E + 4 = -3i \Rightarrow (z_E + 4) = 3(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i.\sin(-\frac{\pi}{2}))$

$$f(M)=E \Leftrightarrow z'=-4-3i \Leftrightarrow z'+4=-3i \Leftrightarrow \begin{cases} |z'+4|=3 \\ Arg(z'+4)\equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-2|^2=3 \\ 2Arg(z-2)\equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-2|=\sqrt{3} \\ Arg(z-2)\equiv -\frac{\pi}{4}(\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z-2=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z-2=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad z=2+\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z=2+\sqrt{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}$$

L'image des points C et D d'affixe $2+\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $2+\sqrt{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ par f est le point E.

$$z_C=2+\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}=2+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$z_D=2+\sqrt{3}e^{3i\frac{\pi}{4}}=2+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

EX 26 :

$$z_A=2i;\ z_B=-1;\ z_C=i \qquad f: M(z)\to M'(z') \qquad tq \quad z'=\frac{z+1}{z-2i}\ ,\ z\neq 2i$$

1)a)

$$z_{C'}=\frac{z_C+1}{z_C-2i}=\frac{i+1}{i-2i}=\frac{1+i}{-i}=-1+i \quad , \quad \boxed{z_{C'}=-1+i}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ aff\left(\overrightarrow{CA}\right)=z_A-z_C=i \\ aff\left(\overrightarrow{BC'}\right)=z_{C'}-z_B=i \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC'} \Rightarrow ACBC' \text{ est un parallelogramme}$$

b) $f(C'')=C \Leftrightarrow \frac{z_{C''}+1}{z_{C''}-2i}=i \Leftrightarrow z_{C''}+1=iz_{C''}+2 \Leftrightarrow z_{C''}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}$

$$\bullet\ \frac{aff\left(\overrightarrow{CC''}\right)}{aff\left(\overrightarrow{CB}\right)}=\frac{\frac{1+i}{2}-i}{-1-i}=\frac{i-\frac{1+i}{2}}{1+i}=\frac{-1+i}{2(1+i)}=\frac{(-1+i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{4}=\frac{1}{2}i$$

$\frac{aff\left(\overrightarrow{CC''}\right)}{aff\left(\overrightarrow{CB}\right)}$ est imaginaire d'où $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{CC''}$ Par suite le triangle BCC'' est rectangle en C.

2)

$$|z'| = \left|\frac{z+1}{z-2i}\right| = \frac{BM}{AM} \qquad Arg(z') \equiv Arg\left(\frac{z+1}{z-2i}\right)(2\pi)$$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}\right)(2\pi)$$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)(2\pi)$$

3)

a) z' est un réel strictement négatif si seulement si : $Arg\ z' \equiv \pi(2\pi) \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \pi(2\pi)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ colinéaire est de sens contraires.

L'ensemble E=[AB]\{A,B}.

b) z' est imaginaire non nul $\Leftrightarrow Arg\ z' \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$

F est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

c) $M' \in C(0,1) \Leftrightarrow |z'| = 1 \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM$

G est la médiatrice du segment [AB].

EX 27 : $z = e^{i\theta} - i; \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

1) $z_M = z = e^{i\theta} - i$ et $z_{M'} = \bar{z} = e^{-i\theta} + i$

OMNM' est un parallélogramme ssi

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{ON}\right) = aff\left(\overrightarrow{OM}\right) + aff\left(\overrightarrow{OM'}\right) \Leftrightarrow z_N = z + \bar{z} \Leftrightarrow z_N = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \Rightarrow \boxed{z_N = 2.\cos\theta}$

Dans ce cas : $OM = OM' = |z|$ d'où OMNM' est losange.

2)

a)

$$z = e^{i\theta} - i = e^{i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{2}\right)} \cdot \left[e^{i\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)}\right] = e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left[2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$ D'après

formules d'Euler

d'où $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

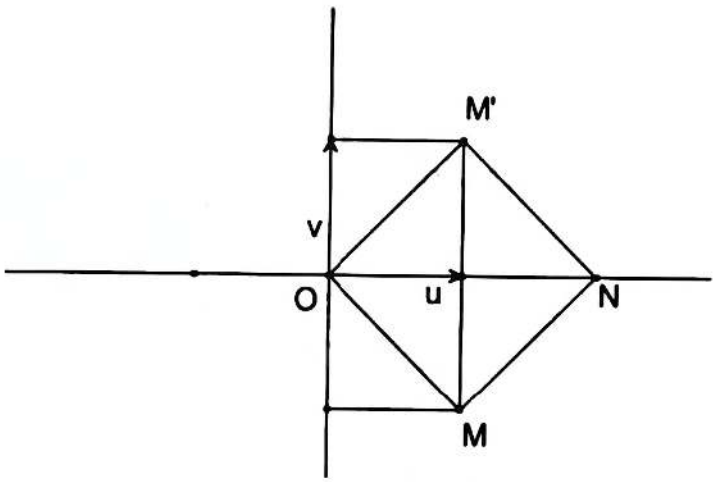
b) $\bar{z} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{z}{\bar{z}} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}$

c) OMNM' est un carré si seulement si $\frac{z}{\bar{z}}$ est imaginaire pure

$\Leftrightarrow Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = (k+1)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$or\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad d'ou\ \boxed{\theta = 0}$

d) $z_M = e^{i0} - i = 1 - i$; $z_N = 2\cos 0 = 2$; $z_{M'} = e^{-i0} + i = 1 + i$



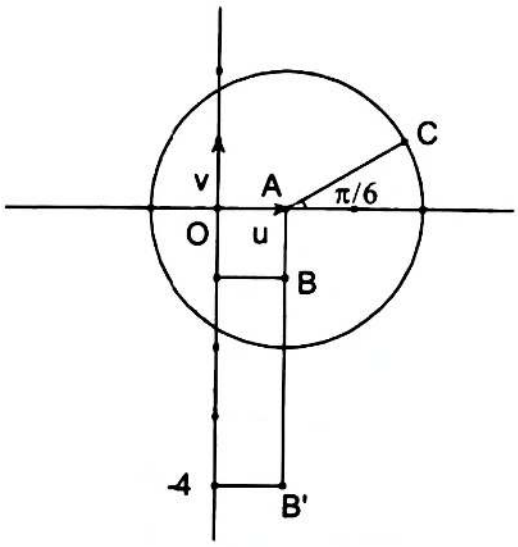
EX 28 :

$z_A = 1$ $\qquad z' = \frac{\bar{z}+3}{\bar{z}-1}$

1) $z_B = 1 - i$

a) $z_{B'} = \frac{\overline{z_B}+3}{\overline{z_B}-1} = \frac{1+i+3}{1+i-1} = \frac{4+i}{i} \Rightarrow \boxed{z_{B'} = 1 - 4i}$

b)



2) $z_c = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

a) $AC = |z_C - z_A| = \left|2e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 2$

b) $\left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv Arg(z_C - z_A)(2\pi) \equiv Arg(2e^{i\frac{\pi}{6}})(2\pi) \equiv \frac{\pi}{6}(2\pi)$

c) $C \in \zeta(A,2)$ *et* $\left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv +\frac{\pi}{6}(2\pi)$

d) $z_{f(C)} = \frac{\overline{z_C} + 3}{\overline{z_C} - 1} = \frac{1 + 2e^{-i\frac{\pi}{2}} + 3}{1 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1} = \frac{4 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\left(4 + 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(2 + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} + 1 = z_C$

D'où $f(C) = C$

3)a) $\left(\overline{z} - 1\right)\left(z' - 1\right) = \left(\overline{z} - 1\right)\left(\frac{\overline{z} + 3}{\overline{z} - 1} - 1\right) = \left(\overline{z} + 3\right) - \left(\overline{z} - 1\right) = 4$

b) $AM.AM' = |z - 1||z' - 1| = \left|\overline{z - 1}\right||z' - 1| = \left|\overline{z} - 1\right||z' - 1| = \left|\left(\overline{z} - 1\right)\left(z' - 1\right)\right| = |4| = 4$

c) $M \in \zeta(A,2) \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow 2.AM' = 4 \Leftrightarrow AM' = 2 \Leftrightarrow M' \in \zeta(A,2)$

D'où l'image de (ζ) par f est lui-même.

EX 29 : $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ $z_0=6+6i$ $A_0(z_0)$ $z_n=a^n.z_0$ $A_n(z_n)$

1) $z_1=a.z_0=6(1+i)\left[\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right]=3+3i\sqrt{3}\Rightarrow \boxed{z_1=3+3i\sqrt{3}}$

$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2+2i\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{16}=\frac{(4+2\sqrt{3})-(4-2\sqrt{3})+4i}{16}\Rightarrow \boxed{a^2=\frac{\sqrt{3}-i}{4}}$

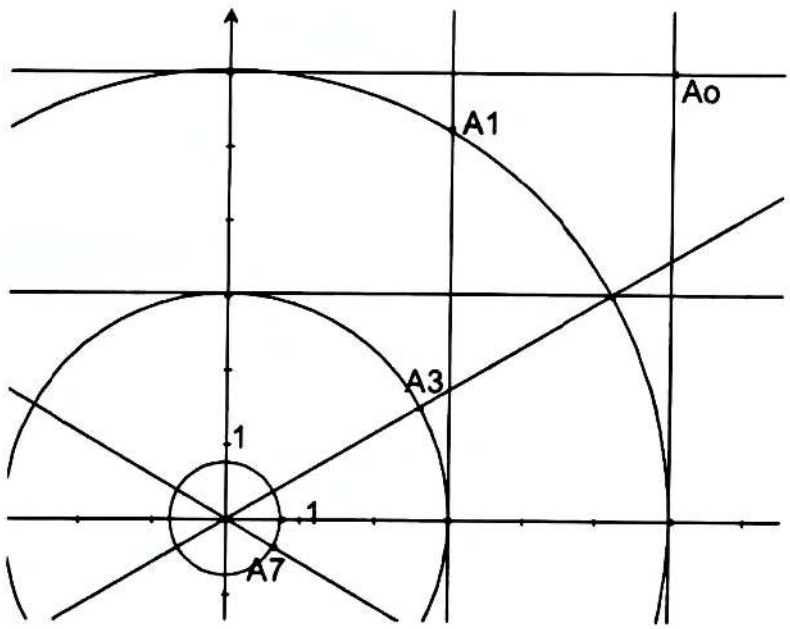
$\bullet z_1=6\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6e^{i\frac{\pi}{3}}$ *et* $a^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_3=a^3.z_0=a^2.(a.z_0)\Rightarrow \boxed{z_3=a^2.z_1}\Rightarrow z_3=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.6.e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow \boxed{z_3=3e^{i\frac{\pi}{6}}}$

2) et 3)

$z_7=a^7.z_0=\boxed{\left(a^2\right)^3.z_1}\Rightarrow z_7=\left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^3.6e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{6}{8}e^{-i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\pi}{3}}\Rightarrow \boxed{z_7=\frac{3}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

4) $z_{A_0}=z_0=6+6i$ $z_{A_1}=z_1=6e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_{A_3}=3e^{i\frac{\pi}{6}}$ $z_{A_7}=\frac{3}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$



EX 30 : $f : M(z) \to M'(z')\ tq : z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ $; z \neq 0$

1)

M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M \in \varsigma(O,1)$

L'ensemble des points invariants par f est le cercle $\zeta(0,1)$

2) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{1}{z.z} = \dfrac{1}{|z|^2} \in IR$ D'où O, M et M' sont alignés.

$OM.OM' = |z|.|z'| = |z|.\left|\dfrac{1}{\bar{z}}\right| = |z|.\dfrac{1}{|\bar{z}|} = |z|.\dfrac{1}{|z|} = 1$

3)a) $z_A = 4; z_B = 2+2i; z_C = 2-2i; z_I = 2$

$$IA = |z_A - z_I| = |2| = 2 \Rightarrow A \in \varsigma(I,2)$$

$$IB = |z_B - z_I| = |2i| = 2 \Rightarrow B \in \varsigma(I,2)$$

$$IC = |z_C - z_I| = |-2i| = 2 \Rightarrow C \in \varsigma(I,2)$$

b)

$z_{A'} = \dfrac{1}{\bar{z}_A} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ $z_{B'} = \dfrac{1}{\bar{z}_B} = \dfrac{1}{2-2i} = \dfrac{1+i}{4}$ $z_{C'} = \dfrac{1}{\bar{z}_C} = \dfrac{1}{2+2i} = \dfrac{1-i}{4}$

$\dfrac{aff\left(\overrightarrow{A'B'}\right)}{aff\left(\overrightarrow{A'C'}\right)} = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{A'}} = \dfrac{\dfrac{i}{4}}{-\dfrac{i}{4}} = -1 \in IR \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}$ *et* $\overrightarrow{A'C'}$ *sont colinéaires*

Par suite A', B' et C'appartiennent a une même droite Δ.

$x_{A'} = x_{B'} = x_{C'} = \dfrac{1}{4}$ D'où $\boxed{\Delta : x = \dfrac{1}{4}}$

4)a) $\left|\dfrac{1}{2} - z'\right| = |z'| \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\dfrac{1}{\bar{z}}\right| \Leftrightarrow \left|\dfrac{\bar{z}-2}{2\bar{z}}\right| = \dfrac{1}{|\bar{z}|} \Leftrightarrow \dfrac{|\bar{z}-2|}{2|\bar{z}|} = \dfrac{1}{|\bar{z}|} \Leftrightarrow |\overline{z-2}| = 2 \Leftrightarrow |z-2| = 2$

b) $M \in (\zeta) \Leftrightarrow |z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|z' - \dfrac{1}{2}\right| = |z'| \Leftrightarrow JM' = OM'$ *avec* $J\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow M' \in med[OJ]$.

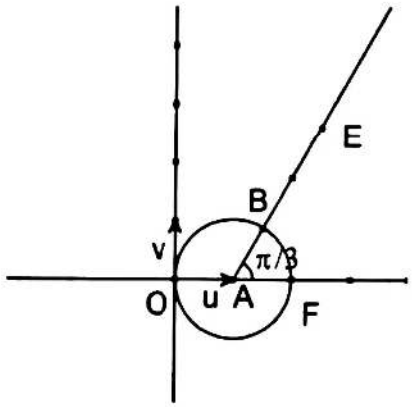
Donc l'image par f du cercle ς est la droite médiatrice de [OJ]

EX 31 $z_A = 1 \; ; \; \zeta = \zeta(A,1)$

I) $z_F = 2 \qquad z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_E = 1 + z_B^2$

1) a) $AB = |z_B - z_A| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ D'où $B \in (\zeta)$

b) $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv Arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}\right)(2\pi) \equiv Arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$



2)

$z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) $z_E - z_A = z_B^2$ *Or* $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}.\left[e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right] = 2\cos\frac{\pi}{6}.e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \boxed{z_E - z_A = z_B^2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}}$

b) $\frac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 3 \in IR$ D'où $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires par suite A,B et E sont alignés

3) $\frac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = 3 \Rightarrow z_{\overrightarrow{AE}} = 3.z_{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 3.\overrightarrow{AB}$ (Voir figure.)

II) $M(z) \; ; \; z \neq 1 \qquad M'(z') \; avec \; z' = 1 + z^2$

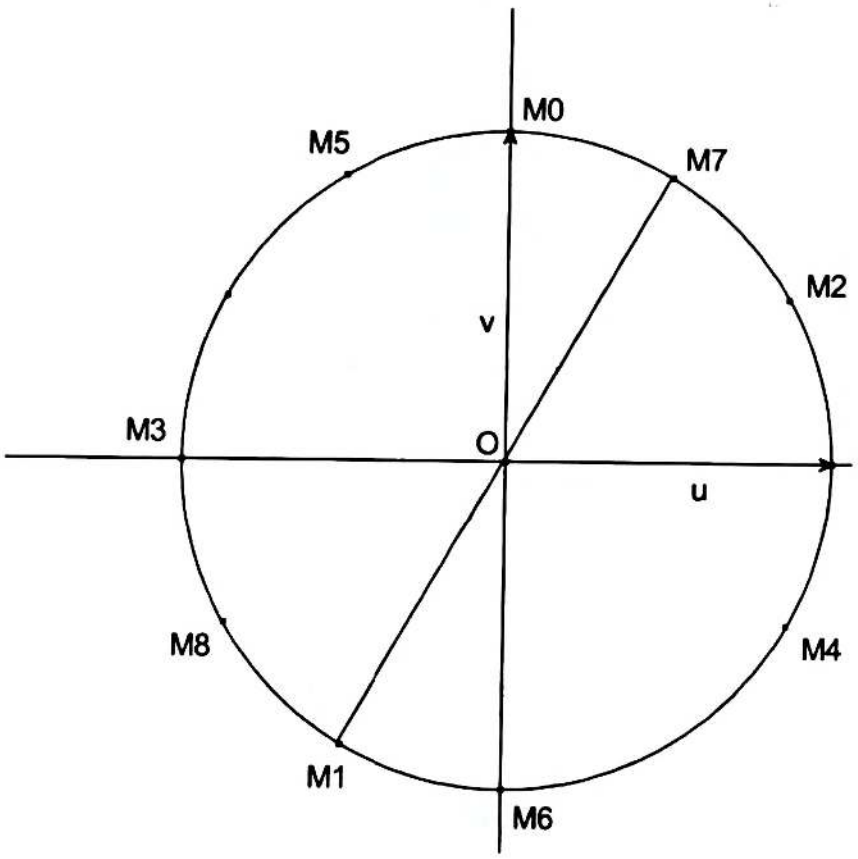
1) $Arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)(2\pi)$

2)A, M et M' alignées si seulement si $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \frac{z'-z_A}{z-z_A}$ est un réel $\Leftrightarrow \frac{1+z^2-1}{z-1}$ est un réel $\Leftrightarrow \frac{z^2}{z-1}$ est un réel

EX 32 : $\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

1) $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{6}$ $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{3}$ $\alpha_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{2}$ $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2} + n\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$



2)

$$\begin{cases} OM_n = 1 \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + n\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)(2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_n| = 1 \\ Arg\ z_n \equiv \dfrac{\pi}{2} + n\left(5\dfrac{\pi}{6}\right)(2\pi) \end{cases} \Rightarrow Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

3) $z_{n+6} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+6)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} + 5\pi\right)} = e^{i5\pi} . e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = -e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = -z_n \Rightarrow M_{n+6} = S_O(M_n)$

Et comme $M_n \in (\zeta)$ Alors M_{n+6} et M_n sont diamétralement opposées.

4) $z_{n+12} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+12)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} + 10\pi\right)} = e^{i10\pi} . e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = z_n \Rightarrow M_{n+12} = M_n$

5) $z_{n+4} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+4)\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} + 10\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i10\frac{\pi}{3}} . e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} + 4\pi\right)} . z_n = e^{-2i\frac{\pi}{3}} . z_n$

$$\left.\begin{array}{l} z_{n+4} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}.z_n \\ z_{n+8} = e^{-2i\frac{\pi}{3}}.z_{n+4} \end{array}\right\rangle \Rightarrow z_{n+8} = e^{-4i\frac{\pi}{3}}.z_n$$

$$\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) \equiv Arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right)(2\pi) \equiv Arg\left(e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{OM_{n+4}}, \overrightarrow{OM_{n+8}}\right) \equiv Arg\left(\frac{z_{n+8}}{z_{n+4}}\right)(2\pi) \equiv Arg\left(e^{-2i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

$$\left(\overrightarrow{OM_{n+8}}, \overrightarrow{OM_n}\right) \equiv Arg\left(\frac{z_n}{z_{n+8}}\right)(2\pi) \equiv Arg\left(e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)(2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3}(2\pi)$$

Et comme M_n, M_{n+4} *et* M_{n+8} appartient à (ζ) alors le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

EX 33 :

1) $z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = e^{i\pi}$ Les solutions sont : $z_k = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}$ Avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_1 = e^{3i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_2 = e^{5i\frac{\pi}{4}} = e^{-3i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_3 = e^{7i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2) $\theta \neq k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z+i = ze^{i\theta} - ie^{i\theta} \Leftrightarrow \left(e^{i\theta}-1\right)z = i\left(e^{i\theta}+1\right) \Leftrightarrow z = \frac{\left(e^{i\theta}+1\right)i}{e^{i\theta}-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} Or \;\; e^{i\theta}+1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \;\; Euler \\ et \;\; e^{i\theta}-1 = e^{i\frac{\theta}{2}}.\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = \left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{\left(e^{i\theta}+1\right)i}{e^{i\theta}-1} = \frac{1}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Bigg\rangle \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

3) i n'est pas une solution de (E)

$$(z+i)^4 = -(z-i)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = -1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{\pi}{4}} \; ou \; \frac{z+i}{z-i} = e^{3i\frac{\pi}{4}} \; ou \; \frac{z+i}{z-i} = e^{-3i\frac{\pi}{4}} \; ou \; \frac{z+i}{z-i} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{1}{tg\frac{\pi}{8}} \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{tg\frac{3\pi}{8}} \quad ; \quad z_3 = -\frac{1}{tg\frac{3\pi}{8}} \quad ; \quad z_4 = -\frac{1}{tg\frac{\pi}{8}}$$

EX 34 : $z_A = -i \qquad z' = \dfrac{i\bar{z}}{i-\bar{z}}$

1)

$$f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{i\bar{z}}{i-\bar{z}} = z \Leftrightarrow i\bar{z} = iz - z\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = i(z-\bar{z}) \text{ en posant } z = x+iy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = i(2iy) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1$$

Donc L'ensemble des points invariants par f est le cercle (ζ) de centre A de rayon 1.

2) a) $(z'+i)(\bar{z}-i) = \left(\dfrac{i\bar{z}}{i-\bar{z}} + i\right)(\bar{z}-i) = -i\bar{z} + i\bar{z} + 1 = 1$

b)

$$AM'.AM = |z'-z_A|.|z-z_A| = |z'+i|.|z+i| = |z'+i|.\left|\overline{\bar{z}-i}\right|$$

$$= |z'+i|.|\bar{z}-i| = |(z'+i)(\bar{z}-i)| = |1| = 1$$

$$\bullet\ (z'+i)(\bar{z}-i) = 1 \Rightarrow z'+i = \frac{1}{\bar{z}-i} \Rightarrow Arg(z'+i) \equiv -Arg(\bar{z}-i)(2\pi)$$

$$\Rightarrow Arg(z'+i) \equiv -Arg(\overline{z+i})(2\pi) \Rightarrow Arg(z'+i) \equiv Arg(z+i)(2\pi)$$

$$\Rightarrow \left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM}}\right)(2\pi) \Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \widehat{\vec{u}}\right) + \left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv 0(2\pi)$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv 0(2\pi)$$

D'où $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires et de même sens par suite : $M' \in [AM)$

3) a)

$$z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{i.\bar{z}}{i-\bar{z}} = e^{i\theta} \Leftrightarrow i.\bar{z} = ie^{i\theta} - e^{i\theta}.\bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{ie^{i\theta}}{i+e^{i\theta}}$$

$$Or\ i + e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}.\left[e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})} + e^{-i(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}\right] = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} \Rightarrow$$

$$z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{ie^{i\theta}}{2.\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right).e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{i}{2}.\left[\frac{e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \frac{i}{2}\left[1 + itg\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) - i\right]$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\right]$$

b) $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 = e^{i0}$ les solutions sont $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \quad k \in \{0,1,2\} \Rightarrow S_C = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$

c)

$$i.z^3=(-i-z)^3 \Leftrightarrow -i.(\bar{z})^3=(i-\bar{z})^3 \Leftrightarrow \left(\frac{i.\bar{z}}{i-z}\right)^3=1 \Leftrightarrow (z')^3=1 \Leftrightarrow z'=1 \text{ ou } z'=e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ ou } z'=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\bullet\ z'=1 \Leftrightarrow z'=e^{i.0} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}(-1+i)=\frac{1}{2}(1-i)$$

$$\bullet\ z'=e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\right]$$

$$\bullet\ z'=e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\right]=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\right]$$

Conclusion : les solutions sont : $z_1=\frac{1}{2}(1-i)$ $z_2=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\right]$ *et* $z_3=-\frac{1}{2}\left[tg\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\right]$

EX 35 : $a\in IR$; $(E): z^2+a(1-i)z-ia^2=0$

1)

$\Delta=a^2(1-i)^2+4ia^2=-2ia^2+4ia^2=2ia^2 \Rightarrow \quad \delta=(1+i)a$

Les solutions sont : $z_1=\frac{-a(1-i)-(1+i)a}{2}=-a$ *et* $z_2=\frac{-a(1-i)+(a+i)a}{2}=ia$

2)

a) $z_A=2+z_1=2-a$ *et* $z_B=z_2=ia$

ACBD carré de sens direct d'où :

$$\begin{cases} CA=CB \\ \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_A-z_C|=|z_B-z_C| \\ \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=1 \\ Arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\end{cases} \Leftrightarrow \frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

$\Leftrightarrow z_A-z_C=iz_B-iz_C \Leftrightarrow (1-i)z_C=z_A-iz_B \Leftrightarrow (1-i)z_C=2-a+a \Leftrightarrow (1-i)z_C=2 \Leftrightarrow z_C=\frac{2}{1-i}$

$\Leftrightarrow \boxed{z_C=1+i}$ Donc C est un point fixe.

b) Soit L l'ensemble des points D lorsque a varie dans IR

ACBD est un carré $\Rightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} \Rightarrow z_D-z_C=z_A-z_C+z_B-z_C$

$\Rightarrow z_D=z_A+z_B-z_C \Rightarrow z_D=(1-a)(1-i)$

Soit $\bar{w}$ le vecteur d'affixe $1-i$; $\bar{w}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $aff\left(\overrightarrow{OD}\right)=(1-a).aff\,\bar{w} \Rightarrow \overrightarrow{OD}=(1-a)\bar{w}$

D appartient à la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\bar{w}$(Δ :y=-x)

Donc L$\subset\Delta$ (1)

Réciproquement soit D un point de $\Delta \Rightarrow D(x,-x) \Rightarrow Z_D = x.(1-i)$
Montrons qu'il existe un réel a tel que ACBD soit carrée direct (avec $z_A=2-a$ et $z_B=ia$)

$$ACBD \text{ carré direct} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AD \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} BC = BD \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_A} = i \quad et \quad \frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = -i$$

$$\Leftrightarrow Z_A = x - 1 \quad et \quad Z_B = i(1-x) \quad en\ posant\ a = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow Z_A = 2 - a \quad et \quad Z_B = ia$$

Donc $\Delta \subset L$ (2) (1) et (2) $\Rightarrow$ L=Δ

Conclusion : l'ensemble des points D lorsque a varie dans IR la droite Δ :y=-x

EX 36 :

1)

a) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad \Delta' = -1 \quad \delta' = i$

Les solutions sont : $z' = \sqrt{3} + i$ *et* $z'' = \sqrt{3} - i$

b) $|z'| = |\sqrt{3} + i| = 2 \rightarrow z' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ *et* $\boxed{z'' = \overline{z'} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.}$

2) $U = \frac{1}{2}\left[(1-i) + \sqrt{3}(1+i)\right]$

a) $U^2 = \sqrt{3} + i$

b)

$$U^2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ ou } U = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Re}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} > 0 \quad et \quad \text{Re}\left(-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right) < 0 \\ Or \quad U = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)\right] \rightarrow \text{Re}(U) > 0 \end{array}\right\rangle U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

D'où $U = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad U = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

c) $U = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ et $U = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]$

D'où :

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

3) $P(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

a)

Soit $\alpha\in IR$

iα *solution de l'éq* $P(z)=0\Leftrightarrow P(i\alpha)=0$

$$\Leftrightarrow -i\alpha^3-2\alpha^2\left(\sqrt{3}+i\right)+4\left(1+i\sqrt{3}\right)i\alpha-8i=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2\alpha^2\sqrt{3}-4\alpha\sqrt{3}\right)+i\left(-\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha-8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha^2\sqrt{3}-4\alpha\sqrt{3}=0 & (1)\\ et\\ -\alpha^3+2\alpha^2+4\alpha-8=0 & (2)\end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\alpha(\alpha-2)=0\Leftrightarrow \boxed{\alpha=0}$ *ou* $\boxed{\alpha=2}$ *Or* $\alpha=0$ *ne verifie pas* (2)

et $\alpha=2$ *verifie bien* (2)

d'où 2i est une solution imaginaire de l'équation P(z)=0.

b)

2i est une solution de $P(z)=0\Rightarrow P(z)=(z-2i)\left(z^2+bz+c\right)=z^3+(b-2i)z^2+(c-2ib)z-2ic$

Identifions : on aura : $\begin{cases}b-2i=-2\left(\sqrt{3}+i\right)\\ c-2ib=4\left(1+i\sqrt{3}\right)\\ -2ic=-8i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\sqrt{3}\\ c=4\end{cases}$

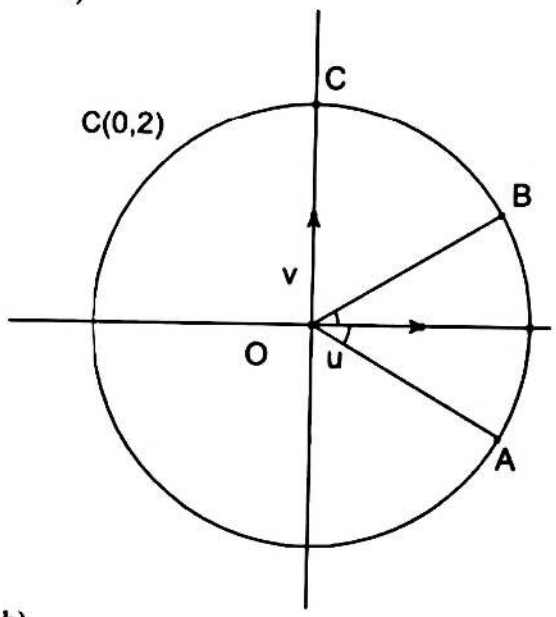
D'où $P(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

$P(z)=0\Leftrightarrow z-2i=0$ *ou* $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

D'après 1) $\Leftrightarrow\begin{cases}z=2i\\ ou\\ z=\sqrt{3}+i\\ ou\\ z=\sqrt{3}-i\end{cases}$ $S_{\mathbb{C}}=\left\{2i;\sqrt{3}+i;\sqrt{3}-i\right\}$

4) $z_A = \sqrt{3} - i$ $z_B = \sqrt{3} + i$ $z_C = 2i$

a)



b)

* $aff\left(\overrightarrow{OC}\right) = z_C = 2i$ et $aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_C = 2i$

D'où $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ OABC est un parallélogramme (1)

* $OA = |z_A| = 2$ $OC = |z_C| = 2$ $\Rightarrow \boxed{OA = OC}$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ OABC est un losange.

EX 37 :

I) $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1) $\left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right)^2 - \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)^2 = 8e^{3i\alpha}$

2) $z^2 - \left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right)z + 2e^{3i\alpha} = 0$

$\Delta = \left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right)^2 - 8e^{3i\alpha} = \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)^2 \rightarrow \delta = e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}$

Les solutions sont :

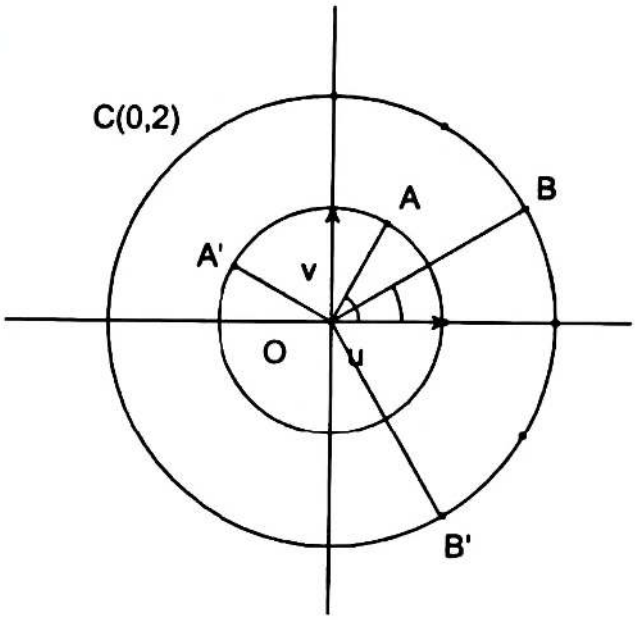
$z' = \frac{\left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right) - \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)}{2} = 2e^{i\alpha}$ et $z'' = \frac{\left(e^{2i\alpha} + 2e^{i\alpha}\right) + \left(e^{2i\alpha} - 2e^{i\alpha}\right)}{2} = e^{2i\alpha}$

II) $z_A = e^{2i\alpha}$; $z_B = 2e^{i\alpha}$; $z_{A'} = ie^{2i\alpha}$; $z_{B'} = -2ie^{i\alpha}$

1)

a) $z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{2i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)}$ et $z_{B'} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} = 2e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$

b) $\alpha=\frac{\pi}{6}$ $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_{A'}=e^{5i\frac{\pi}{6}}$; $z_{B'}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$



2) $I=A'*B'$

a) $z_I=\frac{z_{A'}+z_{B'}}{2}=\frac{i(z_A-z_B)}{2}\Rightarrow\frac{z_I}{z_B-z_A}=\frac{i(z_A-z_B)}{2(z_B-z_A)}=-\frac{i}{2}$

b) $\frac{z_I}{z_B-z_A}=\frac{aff(\overline{OI})}{aff(\overline{AB})}$ est imaginaire pure d'où $(OI)\perp(AB)$

D'où (OI) est une hauteur issue de O au triangle OAB.

* $\frac{OI}{AB}=\frac{|z_I|}{|z_B-z_A|}=\left|-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ D'où $OI=\frac{1}{2}AB$.

EX 38 :

I) $\alpha\in[O,\pi]$

1) $z^2-2e^{i\alpha}z+2e^{2i\alpha}=0$ $\Delta'=e^{2i\alpha}-2e^{2i\alpha}=-e^{2i\alpha}\rightarrow\delta'=ie^{i\alpha}$

Les solutions sont : $z'=e^{i\alpha}+ie^{i\alpha}=(1+i)e^{i\alpha}$ et $z''=(1-i)e^{i\alpha}$

2) $z'=(1+i)e^{i\alpha}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\alpha}\Rightarrow\boxed{z'=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\alpha)}}$ et $z''=(1-i)e^{i\alpha}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}.e^{i\alpha}\Rightarrow\boxed{z''=\sqrt{2}e^{i(\alpha-\frac{\pi}{4})}}$

II) $z_A=(1-i)e^{i\alpha}$ et $z_B=(1+i)e^{i\alpha}$

1) a) $\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{(1+i)e^{i\alpha}}{(1-i)e^{i\alpha}}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$

b) $\dfrac{aff\left(\overrightarrow{OB}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OA}\right)}=\dfrac{z_2}{z_1}=i$ est imaginaire d'où $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ (1)

$\left|\dfrac{z_B}{z_A}\right|=|i|\Leftrightarrow\dfrac{|z_B|}{|z_A|}=1\Leftrightarrow|z_B|=|z_A|\Leftrightarrow OA=OB$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow$ OAB est rectangle et isocèle en O.

2)

a) $\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}\right)\equiv Arg\left(z_2-z_1\right)(2\pi)\equiv Arg(2ie^{i\alpha})(2\pi)\equiv Arg(2i)+Arg(e^{i\alpha})(2\pi)\equiv\dfrac{\pi}{2}+\alpha(2\pi)$

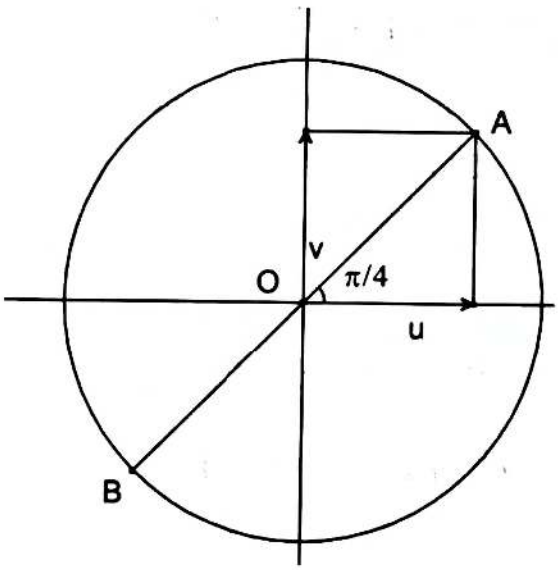
b) Soit $\Delta: y=x$

$(AB)//\Delta\Leftrightarrow\left(\vec{u}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}(\pi)\Leftrightarrow\alpha+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\in\mathbb{Z}$

Comme $\alpha\in[0,\pi]$ d'où $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

Conclusion : $(AB)//\Delta$ si seulement si $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

c) Pour $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ $z_A=(1-i)e^{3i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{5i\frac{\pi}{4}}$



EX 39 :

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad (E) : iz^2 + 6\sin\theta . z - 9i = 0$

1)

$\Delta' = 9\sin^2\theta + 9i^2 = -9 + 9.\sin^2\theta = -9(1 - \sin^2\theta) = -9\cos^2\theta \rightarrow \delta' = 3i\cos\theta$

a) $z' = \frac{-3\sin\theta + 3i\cos\theta}{i} = 3(\cos\theta + i\sin\theta)$ *et* $z'' = \frac{-3\sin\theta - 3i\cos\theta}{i} = 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$

b) $z' = 3e^{i\theta}$ *et* $z'' = 3\left[\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\right] = 3e^{i(\pi - \theta)}$

2) $z_A = 3i$; $z_{M1} = 3(\cos\theta + i\sin\theta)$; $z_{M2} = 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$

a) $|z_A| = |z_{M1}| = |z_{M2}| = 3 \Rightarrow OA = OM_1 = OM_2 = 3$ D'où $A, M_1, M_2 \in \zeta_{(0,3)}$

b) On a $OM_1 = OM_2$ donc OM_1AM_2 est un losange ssi :

$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2A} \Leftrightarrow z_1 = z_A - z_2 \Leftrightarrow 3(\cos\theta + i\sin\theta) = 3i - 3(-\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = i + \cos\theta - i\sin\theta \Leftrightarrow 2\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$ *avec* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

3) $i.z^4 + 3\sqrt{3}.z^2 - 9i = 0$ On pose $t = z^2$ l'équation devient :

$it^2 + 3\sqrt{3}t - 9i = 0 \rightarrow \Delta = -9 \rightarrow \delta = 3i$

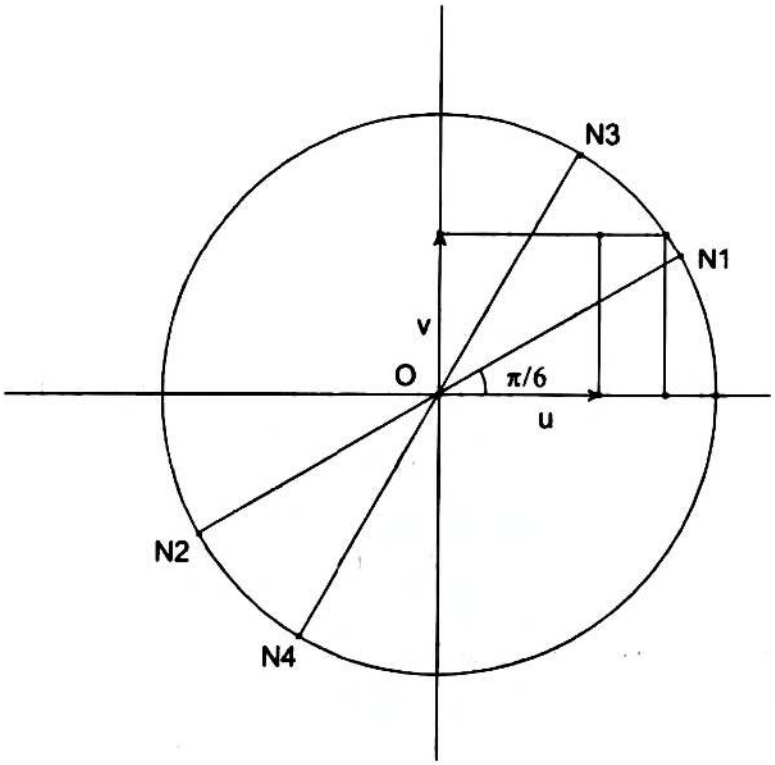
$t' = \frac{-3\sqrt{3} + 3i}{2i} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ *et* $t'' = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

• $t = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow z^2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ *ou* $z = \sqrt{3}e^{7i\frac{\pi}{6}}$

• $t = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow z^2 = 3e^{2i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ *ou* $z = \sqrt{3}e^{4i\frac{\pi}{3}}$

$S_C = \left\{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}; \sqrt{3}e^{7i\frac{\pi}{6}}; \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}; \sqrt{3}e^{4i\frac{\pi}{3}}\right\}$

$N_1\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$; $N_2\left(\sqrt{3}e^{7i\frac{\pi}{6}}\right)$ $N_3\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$; $N_4\left(\sqrt{3}e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)$


N3
N1
v
O
π/6
u
N2
N4